

文章编号:1000-8055(2012)09-2093-06

基于任意两点试验信息的寿命分散系数法

姚 刚, 陆 山

(西北工业大学 动力与能源学院, 西安 710072)

摘 要: 在试验数据缺失无法获得中位寿命时, 为避免偶然因素导致个别试验结果偏低而造成技术寿命偏低, 浪费寿命的情况, 提出了基于任意两点试验信息的寿命分散系数法. 推导了基于对数正态分布小子样任意两点试验信息的寿命分散系数计算公式, 计算了给定置信度下相应的寿命分散系数. 算例表明: 利用提出的方法及相应寿命分散系数, 得到的技术寿命与基于中位寿命获得的技术寿命结果接近, 方法合理. 最后给出了该方法的适用范围.

关 键 词: 技术寿命; 条件概率; 寿命分散系数; 小子样; 截尾数据; 置信度

中图分类号: V232.3

文献标志码: A

Life scatter factor method based on any two pieces of experimental information

YAO Gang, LU Shan

(School of Power and Energy,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Life scatter factor method based on any two pieces of experimental information was proposed in order to avoid the situation that the technology life was lower and wasted, which was caused by the worst result made for accidental factors. The calculation formulas of the life scatter factors based on any two pieces of experimental information of small sample logarithm normal distribution were deduced, and the life scatter factors were calculated with the given confidence level. The numerical example shows: the technology life based on the method and the life scatter factor is close to the technology life based on the traditional median life, and the new method is logical. The application of the method was given in the end.

Key words: technology life; conditional probability; life scatter factor; small samples; censored data; confidence level

目前在航空发动机关键件技术寿命评估中, 国内外主要采用疲劳寿命分散系数法, 利用全尺寸或模拟试件疲劳试验寿命除以对应的分散系数来计算给定可靠度下的概率寿命. 文献[1-2]分别针对对数正态分布与威布尔分布给出基于最差、最好试件寿命的评估方法; 文献[3-4]分别针对对

数正态分布与威布尔分布给出基于第 k 故障试验的评估方法; 文献[5-7]给出了基于中位寿命的分散系数计算公式; 文献[8]给出了适用于完全数据、不完全数据和无失效数据的二维寿命分散系数计算方法; 文献[9]给出了极小子样可靠性评定的多元正态分布整体推断方法; 文献[10]给出了

收稿日期: 2011-10-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120921.1251.023.html>

作者简介: 姚刚(1985-), 男, 吉林白山人, 硕士生, 主要从事航空发动机寿命管理研究.

基于 Bayes-模糊逻辑算子的小子样可靠性信息融合方法。

对于造价昂贵、试验成本高、周期长的航空发动机零部件,工程上一般仅进行小子样数的试验,而且常常因为试验成本、周期等原因将试验人为停止,从而仅能获得截尾的试验寿命数据;另外,由于载荷控制、试验环境的原因,会出现试验意外终止的现象,也将导致无法获得全部试件的试验寿命。上述情况的出现,都会造成试验结果的缺失,从而无法得到最大试验寿命、试验中位寿命、甚至第 k 次序统计量寿命。此时只能利用最小试验寿命计算技术寿命。但是最小试验寿命受到载荷分散性、材料分散性等偶然因素的影响可能性大,极易出现试验结果偏低的现象,从而导致所确定的技术寿命结果偏低,容易造成寿命的浪费,降低了经济性。

本文根据以条件概率为基础,提出基于任意两个点试验信息的寿命分散系数法。在给定置信度与可靠度条件下,推导基于任意两个试验寿命的分散系数计算公式,并最终获得基于任意两个点试验信息技术寿命。通过典型算例,说明了计算公式的正确性及方法结果的合理性。

1 基于任意两点试验信息的寿命分散系数法

1.1 基本假设及公式推导

假设某随机变量 U 服从标准正态分布,即 $U \sim N(0,1)$ 。在该正态分布中,取两个值 C_m 和 C_k ,且 $C_m < C_k$ 。

随机变量 U 小于 C_m 和 C_k 的概率分别为 P_m 和 P_k ,则有

$$P_m = P(U < C_m) = \varphi(C_m) \quad (1)$$

$$P_k = P(U < C_k) = \varphi(C_k) \quad (2)$$

设 $U_1, U_2, \dots, U_n$ 是该分布中的 n 个随机数据。

定义事件 A_{ik} 为:有 i 个数据不大于 C_k ,则事件 A_{ik} 发生的概率为

$$P(A_{ik}) = C_n^i P_k^i (1 - P_k)^{n-i} \quad (3)$$

约定正整数 $m < k \leq n$,将事件 A 记为在 n 个数据中至少有 m 个数据不大于 C_m 。将事件 B 记为这 n 个数据中至少有 k 个数据不大于 C_k ,则事件 A 与事件 B 发生的概率分别为

$$P(A) = \sum_{i=m}^n C_n^i P_m^i (1 - P_m)^{n-i} \quad (4)$$

$$P(B) = \sum_{i=k}^n C_n^i P_k^i (1 - P_k)^{n-i} \quad (5)$$

由概率论知识^[11-12]及排列组合公式,可以计算得到 A 事件与 B 事件同时发生的概率为

$$P(AB) = \sum_{i=m}^n C_n^i P_m^i \times \left[\sum_{\substack{j=k-i \\ (j \geq 0)}}^{n-i} C_{n-i}^j (P_k - P_m)^j (1 - P_k)^{n-i-j} \right] \quad (6)$$

若已知有 i 个数据不大于 C_k , $P(A_{jm}/A_{ik})$ 为此时在这 i 个数据中有 j 个数据不大于 C_m 的概率,则有

$$P\left(\frac{A_{jm}}{A_{ik}}\right) = C_i^j \left(\frac{P_m}{P_k}\right)^j \left(1 - \frac{P_m}{P_k}\right)^{i-j} \quad (7)$$

令 $P(A_{jm}A_{ik})$ 为有 i 个数据不大于 C_k ,而且在这 i 个数据中又有 j 个数据不大于 C_m 两事件同时发生的概率,由条件概率公式及式(3)与式(7)可得

$$P(A_{jm}A_{ik}) = C_n^i P_k^i (1 - P_k)^{n-i} C_i^j \left(\frac{P_m}{P_k}\right)^j \left(1 - \frac{P_m}{P_k}\right)^{i-j} \quad (8)$$

令 $P(A_{Mm}A_{ik})$ 为有 i 个数据不大于 C_k ,而且在这 i 个数据中至少有 m 个数据不大于 C_m 的概率,由式(8)可得

$$P(A_{Mm}A_{ik}) = C_n^i P_k^i (1 - P_k)^{n-i} \times \left[\sum_{j=m}^i C_i^j \left(\frac{P_m}{P_k}\right)^j \left(1 - \frac{P_m}{P_k}\right)^{i-j} \right] \quad (9)$$

同理,可以求出有“ $i+1$ 到 n ”个数据不大于 C_k ,而且至少有 m 个数据不大于 C_m 的概率。再根据全概率公式知,当至少有 k 个数据不大于 C_k ,而且至少有 m 个数据不大于 C_m 的概率,即 A 事件和 B 事件同时发生的概率

$$P(AB) = P(A_{Mm}A_{Kk}) = \sum_{i=k}^n C_n^i P_k^i (1 - P_k)^{n-i} \times \left[\sum_{j=m}^i C_i^j \left(\frac{P_m}{P_k}\right)^j \left(1 - \frac{P_m}{P_k}\right)^{i-j} \right] \quad (10)$$

同理,可以求得当至少有 m 个数据不大于 C_m ,而且至少有 k 个数据不大于 C_k 的概率,此时也是 A 事件和 B 事件同时发生的概率

$$P(AB) = \sum_{i=m}^n C_n^i P_m^i (1 - P_m)^{n-i} \times \left[\sum_{\substack{j=k-i \\ (j \geq 0)}}^{n-i} C_{n-i}^j \left(\frac{P_k - P_m}{1 - P_m}\right)^j \left(1 - \frac{P_k - P_m}{1 - P_m}\right)^{n-i-j} \right] \quad (11)$$

将式(10)与式(11)进行整理、简化后,都可以得到与式(6)同形式的概率公式,由此可以间接地证明公式(10)与(11)的正确性.

1.2 寿命分散系数

当疲劳寿命服从对数正态分布时,可以将一组对数寿命 $\lg N$ 建立次序统计量后转换为标准正态分布,此时有下式成立

$$\frac{\lg N_i - \mu}{\sigma} = U_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

$$U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_n \quad (13)$$

同样定义正整数 $m < k \leq n$, 将事件 A 记为这 n 个数据中至少有 m 个数据不大于 C_m , 将事件 B 记为这 n 个数据中至少有 k 个数据不大于 C_k , 当事件 A 与事件 B 都发生的置信度为 γ 时, 则有

$$P(AB) = P(U_m \leq C_m, U_k \leq C_k) = \gamma \quad (14)$$

可靠度为 p 的概率寿命

$$\frac{\lg N_p - \mu}{\sigma} = U_p = -\varphi^{-1}(p) \quad (15)$$

联立式(12), 式(14)~式(15)可得

$$P\left(\frac{\lg(N_m/N_p)}{\sigma} \leq C_m + \varphi^{-1}(p), \frac{\lg(N_k/N_p)}{\sigma} \leq C_k + \varphi^{-1}(p)\right) = \gamma \quad (16)$$

联立式(1), 式(2)与式(16), 并进行整理可得

$$P\left(N_p \geq \frac{N_m}{S_m}, N_p \geq \frac{N_k}{S_k}\right) = \gamma \quad (17)$$

式(17)中, S_m 和 S_k 即为给定置信度为 γ 时, 基于试验寿命 N_i 的第 m , 第 k 次序统计量所对应的寿命分散系数.

$$S_m = 10^{\sigma[\varphi^{-1}(P_m) + \varphi^{-1}(p)]} \quad (18)$$

$$S_k = 10^{\sigma[\varphi^{-1}(P_k) + \varphi^{-1}(p)]} \quad (19)$$

1.3 寿命分散系数求解及技术寿命的确定

观察式(18)与式(19)可知, 必须首先求解 P_m 与 P_k 值, 才可最终计算得到所需的寿命分散系数.

求解 P_m 与 P_k 时, 可以令式(4)等于 $\sqrt{\gamma}$, 式(11)等于置信度 γ 联立求解, 或者令式(5)等于 $\sqrt{\gamma}$, 式(10)等于置信度 γ 进行联立求解. 由式(6)、式(10)与式(11)可知, 置信度 γ 是 P_m 与 P_k

两个变量的函数, 给定置信度求解 P_m 与 P_k 时, 所得结果并不唯一, 但这两种解法得出 P_m 与 P_k 的值所确定的寿命分散系数差别小于 2%. 如令式(10)与式(11)同时等于置信度 γ , 式(4)与式(5)相等且大于 γ , 利用计算机编程迭代求解, 可找出同时满足式(5)、式(6)、式(12)与式(13)的 P_m 与 P_k 值. 典型子样数寿命分散系数见表 1.

表 1 寿命分散系数表 ($p=0.99865$, $\gamma=0.95$)

Table 1 Life scatter factors
($p=0.99865$, $\gamma=0.95$)

n	k	m	S_m	S_k
2	2	1	3.2790	4.7331
3	2	1	2.8501	3.5839
3	3	1	2.8731	4.9768
3	3	2	3.5980	4.9494
4	2	1	2.6125	3.1296
4	3	1	2.6327	3.8039
4	3	2	3.1304	3.7754
4	4	1	2.6402	5.1428
4	4	2	3.1576	5.1303
4	4	3	3.7964	5.1022
5	2	1	2.4564	2.8693
5	3	1	2.4731	3.3308
5	3	2	2.8655	3.3048
5	4	1	2.4809	3.9568
5	4	2	2.8893	3.9445
5	4	3	3.3112	3.9172
5	5	1	2.4860	5.2647
5	5	2	2.8998	5.2595
5	5	3	3.3415	5.2492
5	5	4	3.9409	5.2242

在利用表 1 寿命分散系数时, 由式(17)可知, 给定置信度 γ 为两个不等式 $N_p \geq N_m/S_m$ 与 $N_p \geq N_k/S_k$ 同时成立时的概率, 所以技术寿命 N_p 最终可以在该置信度下取到两个概率寿命中的较大者, 即

$$N_p = \max\left(\frac{N_m}{S_m}, \frac{N_k}{S_k}\right) \quad (20)$$

2 算 例

算例 1 已知一组 5 件试件的试验寿命分别为 2 264, 3 485, 3 806, 4 372 周和 5 365 周, 若该组试件疲劳寿命服从对数正态分布, 假设母体最大最小寿命比 $N_{0.13}/N_{99.87}=6$.

根据文献[13], 对该组试件试验寿命数据进行 χ^2 检验.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^{*2}}{[\lg(6)/6]^2} = 4.6146 < 4.878^{[10]} \quad (21)$$

式中 s^* 为子样标准差. 此 χ^2 检验说明该组试件试验寿命数据标准差符合检验条件, 寿命分散性符合假设条件, 可以认为母体的最大最小寿命之比为 6.

文献[1]中的分散系数及确定的技术寿命列于表 2; 利用本文方法所得分散系数列于表 3, 最终确定的技术寿命结果列于表 4.

表 2 基于常规方法确定的技术寿命^[1]

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

Table 2 Technology life based on traditional method^[1]

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

	基于 最差试件	基于 中位寿命	基于 最好试件
试验寿命 N	2 264	3 712	5 365
分散系数 S	2.361	3.051	4.895
技术寿命 N_p	959	1 217	1 096

表 3 本文方法所用的寿命分散系数

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

Table 3 Life scatter factors used in this paper

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

		$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$m=1$	S_m	2.4564	2.4731	2.4809	2.486
	S_k	2.8693	3.3308	3.9568	5.2647
$m=2$	S_m		2.8655	2.8893	2.8998
	S_k		3.3048	3.9455	5.2595

由表 2 可见, 基于最差试件寿命所得技术寿命仅为 959 周, 而利用试验数据信息量最全的中位寿命所得的技术寿命为 1 217 周, 比前者高出

27%. 这说明最差试件寿命可能受到了某些不确定的偶然因素的影响, 造成试验结果偏低, 从而导致所确定的技术寿命偏低.

表 4 利用本文方法确定的技术寿命

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

Table 4 Technology life based on this paper

($p=0.998\,65, \gamma=0.95, n=5$)

	技术寿命 N_p			
	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$m=1$	1 215	1 143	1 105	1 019
$m=2$		1 216	1 206	1 202

以中位寿命所得的技术寿命 1 217 周为比较基准. 对于表 4 中的结果, 可以舍弃最低的 1 019 周, 因为在得到最大试验寿命时, 通常会采用中位寿命计算技术寿命. 而其他基于任意两个寿命次序统计量所得的技术寿命结果均与 1 217 周较接近, 最多低 9.2%, 其他计算技术寿命差别均小于 6%.

算例 2 以算例 1 试验数据中的第 2 次序统计量缺失为例, 假设试验循环到 3 000 时试验意外终止, 没有得到真实试验结果 3 485 周.

此时无法得到中位寿命, 只能用其他已知试验寿命进行计算. 虽然文献[14-15]指出, 可以利用试验最低值或者试验最高值计算技术寿命, 并取其中较大者, 但是这样做会使确定的技术寿命风险增加. 利用本文公式(5)~公式(7)的计算结果或数值仿真的结果均表明, 文献[14-15]中直接取较大技术寿命时, 置信度会由原来的 95% 下降到 90% 左右. 而常规方法将只利用最差试验结果确定技术寿命, 本例中所得结果为 959 周. 以上基于单点试验信息确定技术寿命的方法, 由于信息量不足且最有可能使用的是受客观条件影响最大的最差试件试验寿命, 所以极易得到与真实结果有较大偏差的技术寿命.

利用本文方法时, 试验寿命 3 806 周可能成为第 2 或第 3 次序统计量, 依此类推 4 372 周可能为第 3、第 4 次序统计量, 5 365 周可能为第 4、第 5 次序统计量. 令 $m=1$, 次序统计量 k 取不同值时所得技术寿命的结果列于表 5.

对于表 5 结果, 出现 1 326 周、1 312 周与 1 356 周高于 1 217 周的情况是因为在计算时将它们实际的第 k 次序统计量降低到了 $k-1$, 也就是说在

假设缺失的 3485 周分别高于 3806 周、4372 周与 5365 周的时候所出现的情况,但是最高的寿命估计值 1356 周也只比 1217 周高出 11.4%,说明以上 3 个寿命估计值对实际技术寿命的确定还是具有参考价值.而无论 k 取何值,所得技术寿命结果均高于文献[1]利用最差试件所得的 959 周,最低的估计值 1019 周也比 959 周高出 6.3%,这有效地避免了最小试验寿命偏低时导致所确定的技术寿命结果偏低现象,减少了寿命的浪费,提高了经济性.

表 5 有数据缺失时的技术寿命
($n=5, m=1, p=0.99865, \gamma=0.95$)

Table 5 Technology life when some test data is missed
($n=5, m=1, p=0.99865, \gamma=0.95$)

	N		
	3806	4372	5365
$k=2$	1326		
$k=3$	1143	1312	
$k=4$	1105	1356	
$k=5$			1019

当算例 1 试验数据中除最小值的任意一个次序统计量缺失时,利用本文方法计算出的技术寿命都在 1019 周到 1356 周之间,均在技术寿命结果 1217 周附近波动,估计寿命结果稳定.由此也可以说明在有试验数据缺失时,利用本文方法可以获得更接近真实的技术寿命.

3 结 论

提出了基于任意两点试验信息的寿命分散系数法.推导了基于对数正态分布小子样任意两点试验信息的寿命分散系数计算公式;计算了给定置信度下相应的寿命分散系数.通过 2 个算例说明了本文方法的合理性:本文方法与基于中位寿命所获得的技术寿命结果接近;在难以得到中位寿命的情况下,本文方法可以获得更接近真实的技术寿命,避免了由于偶然因素造成个别试验寿命偏小对技术寿命估计值的影响.

基于任意两点试验信息的寿命分散系数法适用于子样数 $N>1$ 的小子样数据.本文方法在实际应用中,对试验价格昂贵不便得到中位寿命的截尾试验数据,所得寿命结果一般优于只采用最差试验寿命时的结果;对试验过程中个别试件因

偶然因素意外提前终止的情况,采用本文方法可以提高技术寿命的评估精度.

参考文献:

- [1] 陆山,杨剑秋.基于小子样最差和最好试验结果的寿命分散系数法[J].机械科学与技术,2006,25(1):103-105.
LU Shan, YANG Jianqiu. Life scatter factor method based on the worst and the best experiment results of small samples[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2006, 25(1): 103-105. (in Chinese)
- [2] 么亮,冯蕴雯.三参数威布尔分布疲劳寿命分散系数确定方法[J].科学技术与工程,2009(6):104-109.
YAO Liang, FENG Yunwen. Fatigue life factor conformation method for sample follows the three parameters weibull distribution[J]. Science Technology and Engineering, 2009(6): 104-109. (in Chinese)
- [3] 卢小艳,陆山.基于对数正态分布第 k 试验寿命的分散系数法[J].航空动力学报,2006,21(4):124-126.
LU Xiaoyan, LU Shan. Life scatter factor method based on the k th order experimental life with logarithm normal distribution[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(4): 124-126. (in Chinese)
- [4] 卢小艳,陆山.基于威布尔分布 k 故障试验的寿命可靠性评估[J].机械设计与研究,2005,21(6):10-12.
LU Xiaoyan, LU Shan. Reliability assessment based on the k th ordered experiment life of weibull distribution[J]. Machine Design and Research, 2005, 21(6): 10-12. (in Chinese)
- [5] 贺小凡,刘文.服从不同分布的疲劳寿命分散系数分析[J].北京航空航天大学学报,2002,28(1):47-49.
HE Xiaofan, LIU Wenting. On scatter factors fatigue life obeying different distributions[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and astronautics, 2002, 28(1): 47-49. (in Chinese)
- [6] 刘文琰,王智,隋福成,等.单机寿命监控技术指南[M].北京:国防工业出版社,2010.
- [7] 高镇同.疲劳应用统计学[M].北京:国防工业出版社,1986.
- [8] 傅惠民,熊峻江.二维寿命分散系数和二维强度缩减系数[J].航空动力学报,1994,9(3):233-236.
FU Huimin, XIONG Junjiang. Two-dimensional factors of life scatter and strength reduction[J]. Journal of Aerospace Power, 1994, 9(3): 233-236. (in Chinese)
- [9] 傅惠民.多元正态分布整体推断方法[J].航空动力学报,2005,20(6):905-909.
FU Huimin. Integral inference method for multivariate normal distributions[J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(6): 905-909. (in Chinese)
- [10] 冯静,周经伦.基于 Bayes-模糊逻辑算子的小子样可靠性信息融合方法[J].航空动力学报,2008,23(9):1633-1636.
FENG Jing, ZHOU Jinglun. Small-sample reliability information fusion approach based on bayes-fuzzy logistic oper-

- ator[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(9): 1633-1636. (in Chinese)
- [11] 罗李平. 关于极差分布的求法讨论[J]. 贵阳师范学院学报: 自然科学版, 2000, 21(6): 29-31.
- LUO Liping. Discussions on the solution of the distribution of range[J]. Journal of Hengyang Normal University: Natural Science, 2000, 21(6): 29-31. (in Chinese)
- [12] 杨桂元. 次序统计量的抽样分布[J]. 数学理论与应用, 2005, 25(3): 104-106.
- YANG Guiyuan. The sample distributions of order statistic[J]. Mathematical Theory and Applications, 2005, 25(3): 104-106. (in Chinese)
- [13] 杜少辉, 陆山. 关于服从对数正态分布疲劳寿命分散系数的讨论[C]//中国航空学会第四届航空发动机可靠性学术交流会议论文集. 厦门: 中国航空学会, 2007: 410-414.
- [14] 苏清友, 孔瑞莲, 陈筱雄等. 航空涡喷、涡扇发动机主要零部件定寿指南[M]. 北京: 航空工业出版社, 2004.
- [15] 吕文林, 陈俊粤, 田德义, 等. 航空涡喷、涡扇发动机结构设计准则(研究报告)第二册: 轮盘[M]. 北京: 中国航空工业总公司发动机系统工程局, 1997.